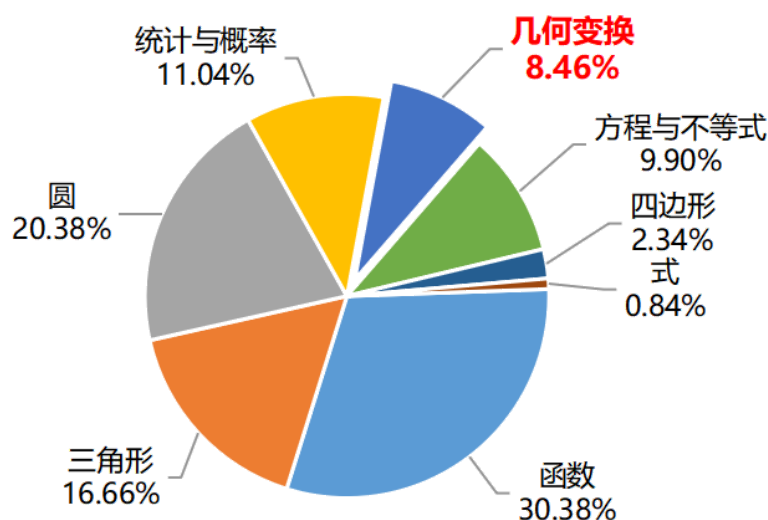


第1讲 旋转基础

旋转属于人教版教材第二十三章的内容，会与三角形、四边形的性质进行综合，是期中、期末考试的重要考察点。本模块《旋转初步》，重点包括旋转的性质，需要学生在理解性质的基础上，学会旋转模型，总结一定的解题思路，为后续综合练习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块分为旋转基础、旋转综合2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
旋转与中心对称	★	高
旋转与手拉手模型	★★★★	中
旋转与对角互补模型	★★★★	中
旋转与角含半角模型	★★★★	中

什么是旋转



观察以上两图：

如果把时针，当成一个图形，那么时针从10点到11点的的变化过程是绕着着一个点转动一定的角度。

风力发电的风车如上，请认识一下！风车的每一个叶片在风的吹动下，绕着中间轴，转到一个新的位置，这种运动我们把它称之为旋转.

一、 旋转与中心对称

1. 旋转的定义

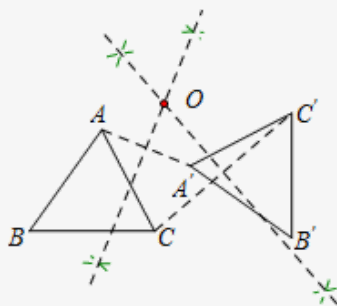
旋转定义	在平面内，将图形绕一个定点O沿某个方向（逆时针或顺时针）转动一定的角度，这样的图形变换叫做旋转．这个定点O叫做 <u>旋转中心</u>，转动的角称为 <u>旋转角</u>． 图形上的点P经过旋转变为点P'，那么这两个点叫做旋转的 <u>对应点</u>． 如图，将$\triangle PMQ$绕点O顺时针旋转60°得到$\triangle P'M'Q'$，点O是旋转中心，P与 P' 是对应点，M与 M' 是对应点，Q与 Q' 是对应点，$\angle POP'$、$\angle MO{M'}^{\prime}$ 是旋转角．
旋转三要素	① <u>旋转中心</u>；② <u>旋转方向</u>；③ <u>旋转角</u>．
旋转性质	①对应点到旋转中心的距离 <u>相等</u>．$OP = \quad$，$OQ = \quad$，$OM = \quad$． ②对应点与旋转中心所连线段的夹角都 <u>等于旋转角</u>． $\angle POP' = \angle QO{Q'}^{\prime} = \angle MO{M'}^{\prime}$． ③旋转前后图形 <u>全等</u>

【备注】 旋转问题要注意：①旋转角相等 ②旋转前后图形全等（利用全等的性质）

旋转前后的对应边可以构成等腰三角形

对应点所连线段的垂直平分线的交点即为旋转中心（作图依据是：与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上．）

例： $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转一定角度得到 $\triangle A'B'C'$ ，请确定旋转中心 O 的位置



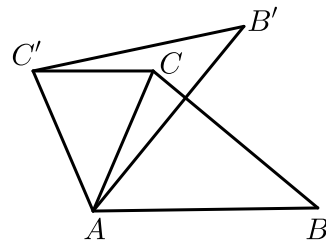
已知旋转前后的图形找旋转中心，旋转中心是对应点连线的垂直平分线的交点．

连接 AA' 、 CC' ，分别作 AA' 、 CC' 的垂直平分线交于点 O ，点 O 即为旋转中心．

🔔 举个“栗”子

栗子1

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 65^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 在平面内绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$ 的位置，使 $CC' \parallel AB$ ，则旋转角的度数为（ ）。



- A. 35° B. 40° C. 50° D. 65°

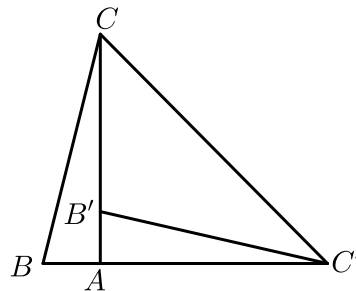
【备注】由旋转可得 $\triangle ACC'$ 为等腰三角形($AC' = AC$)，根据三角形内角和求 $\angle CAC'$ ；可进一步提问学生此题的旋转角还有谁($\angle BAB'$)，但是本题中没有办法求出该角的度数

【答案】 C

【解析】 $\because CC' \parallel AB$,
 $\therefore \angle ACC' = \angle CAB = 65^\circ$,
 $\because \triangle ABC$ 绕点 A 旋转得到 $\triangle AB'C'$,
 $\therefore AC = AC'$,
 $\therefore \angle CAC' = 180^\circ - 2\angle ACC' = 180^\circ - 2 \times 65^\circ = 50^\circ$,
 $\therefore$ 旋转角的度数为 50° .

【标注】【知识点】求旋转角

2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle AB'C'$ （点 B 的对应点是点 B' ，点 C 的对应点是点 C' ），连接 CC' ．若 $\angle CC'B' = 32^\circ$ ，则 $\angle B$ 的大小是（ ）。



- A. 32° B. 64° C. 77° D. 87°

【备注】根据 $\triangle CAC'$ 为等腰直角三角形求解

【答案】C

【解析】由旋转的性质可知， $AC = AC'$ ，

$\therefore \angle CAC' = 90^\circ$ ，可知 $\triangle CAC'$ 为等腰直角三角形，则 $\angle CC'A = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle CC'B' = 32^\circ$ ，

$\therefore \angle C'B'A = \angle C'CA + \angle CC'B' = 45^\circ + 32^\circ = 77^\circ$ ，

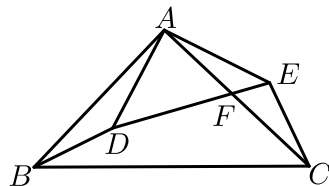
$\therefore \angle B = \angle C'B'A$ ，

$\therefore \angle B = 77^\circ$ 。

【标注】【知识点】旋转的性质

栗子2

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 10\text{cm}$ ，点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAD = 15^\circ$ ， $AD = 6\text{cm}$ ，连接 BD ，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点为点 E ，连接 DE ， DE 交 AC 于点 F ，则 CF 的长为 _____ cm 。



【备注】由旋转可得 $\triangle DAE$ 为等腰直角三角形， $\angle CAE = 15^\circ$ ；提问学生想求 CF 的长，可以转化为求谁（ AF ）——进一步利用等腰直角三角形三线合一的性质，作 DE 的垂线，得到 $\angle GAF = 30^\circ$ ，即可求出 AF 的长

【答案】 $(10 - 2\sqrt{6})$

【解析】过点 A 作 $AG \perp DE$ 于点 G ，

由旋转知：

$AD = AE$ ， $\angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle CAE = \angle BAD = 15^\circ$ ，

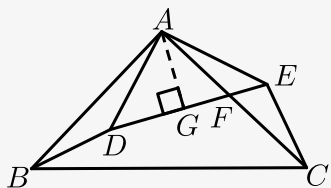
$\therefore \angle AED = 45^\circ$ ，

在 $\triangle AEF$ 中： $\angle AFD = \angle AED + \angle CAE = 60^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 中： $AG = DG = \frac{AD}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ ，

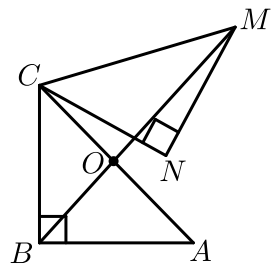
在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中： $GF = \frac{AG}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ ， $AF = 2FG = 2\sqrt{6}$ ，

$\therefore CF = AC - AF = 10 - 2\sqrt{6}$ 。



【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = \sqrt{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle MNC$ ，连接 BM ，则 BM 的长是（ ）。



A. 4

B. $\sqrt{3} + 1$

C. $\sqrt{3} + 2$

D. $\sqrt{7}$

【备注】由旋转可得 $AC = CM$ ， $\angle ACM = 60^\circ$ ，则 $CM = AM$ ，又 $\because CB = BA$ ， $\therefore BM$ 为线段 AC 的垂直平分线，分别求解 BO 、 MO 即可

【答案】B

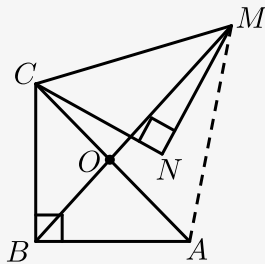
【解析】如图，连接 AM ，

由题意得： $CA = AM$ ，

$\angle ACM = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACM$ 为等边三角形，

$\therefore AM = CM$ ，



$\angle MAC = \angle MCA = \angle AMC = 60^\circ$ 。

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = \sqrt{2}$ ，

$\therefore AC = CM = 2$ ，

$\because AB = BC$ ， $CM = AM$ ，

$\therefore BM$ 垂直平分 AC ，

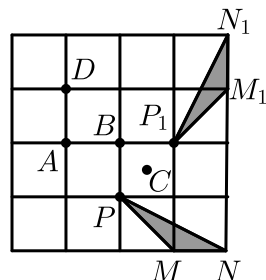
$\therefore BO = \frac{1}{2}AC = 1$ ， $OM = CM \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

$\therefore BM = BO + OM = 1 + \sqrt{3}$ ，

故选：B。

【标注】【知识点】等边三角形的构造

5. 如图，在 4×4 的正方形网格中， $\triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度，得到 $\triangle M_1N_1P_1$ ，则其旋转中心可能是（ ）。



- A. 点A B. 点B C. 点C D. 点D

【备注】 寻找旋转中心

PP_1 的垂直平分线为 DC ， NN_1 的垂直平分线为 AB ，交点即为旋转中心

MM_1 的垂直平分线在图中寻找起来会稍复杂（利用矩形对角线相等且互相平分找到 MM_1 的中点，然后构造直角边比为1.5 : 4.5的直角三角形），不建议利用 MM_1 求，如果学生程度比较好，可以试着带他练习

【答案】 B

【解析】 方法一： $\because$ 旋转中心到对应点的距离相等，

$\therefore$ 旋转中心在对应点连线线段的中垂线上.

$\therefore$ 连接 PP_1 ，则在 PP_1 的中垂线上的点有 D 、 B 、 C ，

连接 NN_1 ，则在 NN_1 的中垂线上的点有 A 、 B ，

$\therefore$ 旋转中心为点 B .

方法二： $\because \triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度，得到

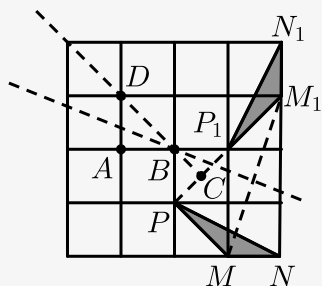
$\triangle M_1N_1P_1$ ，

$\therefore$ 连接 PP_1 、 NN_1 、 MM_1 ，

作 PP_1 的垂直平分线过点 B 、 D 、 C ，

作 NN_1 的垂直平分线过点 B 、 A ，

作 MM_1 的垂直平分线过点 B ，



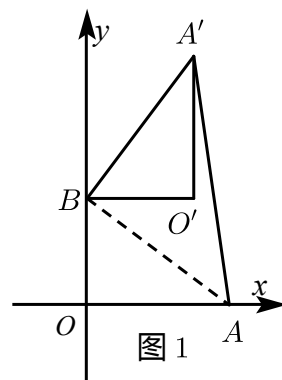
∴三条线段的垂直平分线正好都过点 B ，
即旋转中心是点 B ．
故选 B ．

【标注】【知识点】确定旋转中心

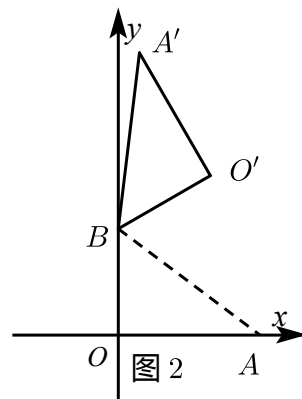
栗子4

6. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(4, 0)$ ，点 $B(0, 3)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得 $\triangle A'BO'$ ，点 A 、 O 旋转后的对应点为 A' 、 O' ，记旋转角为 α ．

(1) 如图1，若 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AA' 的长．



(2) 如图2，若 $\alpha = 120^\circ$ ，求点 O' 的坐标．



【备注】(1) 旋转 90° 得到 $\triangle ABA'$ 等腰直角三角形
(2) 求 O' 坐标，向 y 轴作垂直，利用特殊直角三角形求解

【答案】(1) $5\sqrt{2}$ ．
(2) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ．

【解析】(1) ∵点 $A(4, 0)$ ，点 $B(0, 3)$ ，
∴ $OA = 4$ ， $OB = 3$ ．
在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，由勾股定理得 $AB = 5$ ．

根据题意， $\triangle A'BO'$ 是 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到的，
由旋转性质可得： $\angle A'BA = 90^\circ$ ， $A'B = AB = 5$ ，
 $\therefore AA' = 5\sqrt{2}$ 。

(2) 如图，根据题意，由旋转性质可得： $\angle O'BO = 120^\circ$ ，

$$O'B = OB = 3，$$

过点 O' 作 $O'C \perp y$ 轴，垂足为 C ，

$$\text{则 } \angle O'CB = 90^\circ，$$

在 $\text{Rt}\triangle O'CB$ 中，

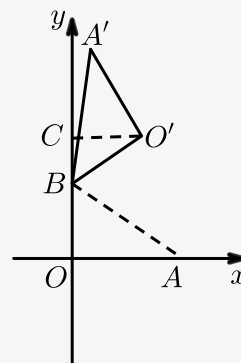
$$\text{由 } \angle O'BC = 60^\circ，\angle BO'C = 30^\circ，$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}O'B = \frac{3}{2}。$$

$$\text{由勾股定理 } O'C = \frac{3\sqrt{3}}{2}，$$

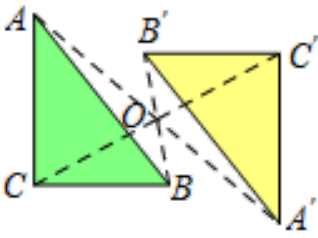
$$\therefore OC = OB + BC = \frac{9}{2}，$$

$$\therefore \text{点 } O' \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2} \right)。$$



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

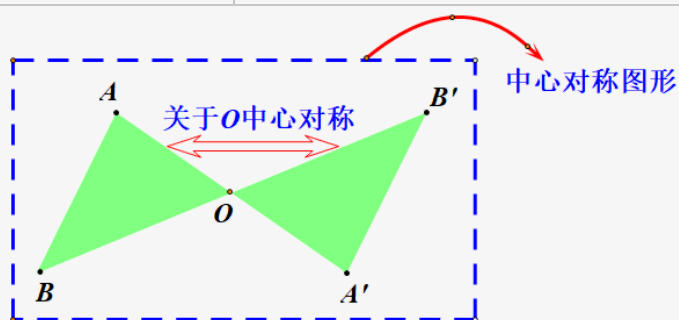
2. 中心对称与中心对称图形

中心对称定义	把一个图形绕着某一点旋转 <u>180°</u>，如果它能够与另一个图形 <u>重合</u>，那么就说这两个图形关于这个点 <u>对称</u> 或 <u>中心对称</u>，这个点叫做 <u>对称中心</u>。这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的 <u>对称点</u>。 
中心对称性质	中心对称的两个图形，对称点所连线段都 <u>经过</u> 对称中心，而且被对称中心所 <u>平分</u>。

【备注】常见的中心对称图形有：线段、平行四边形、矩形、菱形、正方形、圆。

轴对称图、中心对称图均针对一个图形的对称而言，是指一副完整的图，研究的对象一个整体，是一个研究对象，而成轴对称，中心对称是指两个图形的位置关系。这是最本质的区别。

中心对称与中心对称图形的区别与联系	
区别	中心对称是指 两个 图形的关系； 中心对称图形是指具有某种性质的 一个 图形。
联系	若把中心对称图形的两个部分分别看作两个图形，则他们成中心对称； 若把中心对称的两个图形看作一个整体，则成为中心对称图形。



🧠 举个“栗”子

栗子5

7. 下列常用手机app的图标中，是中心对称图形的是（ ）。



【备注】中心对称图形的判断

可将讲义转 180° 度观察前后图形是否完全一样

【答案】D

【解析】中心对称图形的定义：

在平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180° ，

如果旋转后的图形与另一个图形重合。

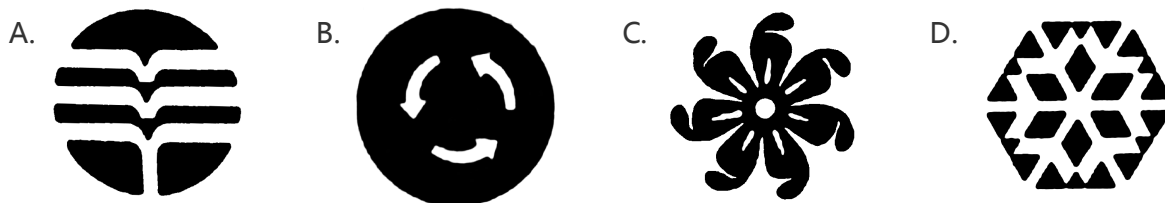
那么就说明这两个图形关于这个点成中心对称。

A选项：不是中心对称图形，故A错误；

B选项：不是中心对称图形，故B错误；
 C选项：不是中心对称图形，故C错误；
 D选项：是中心对称图形，故D正确．
 故选D．

【标注】【知识点】中心对称图形的定义

8. 下列图案中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）．



【备注】轴对称图形：一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形

【答案】D

【解析】A 选项：不是中心对称图形，但是轴对称图形，故A不正确．

B 选项：既不是轴对称图形，又不是中心对称图形，故B不正确．

C 选项：是中心对称图形，但不是轴对称图形，故C不正确．

D 选项：既是中心对称图形，又是轴对称图形，故D正确．

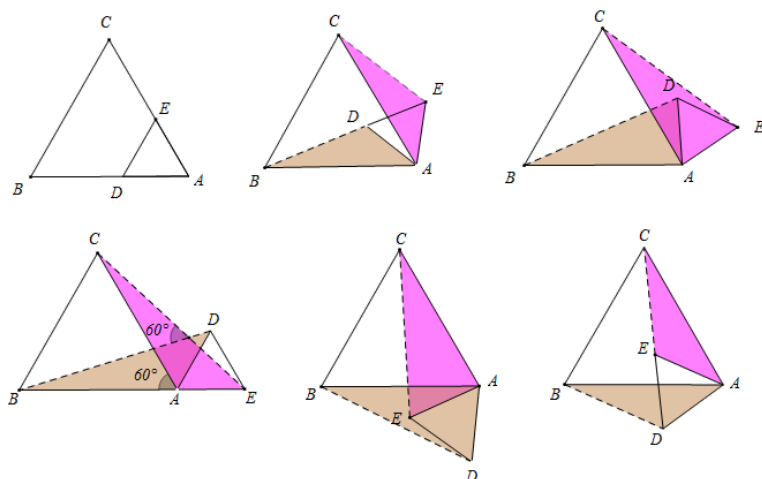
故选 D．

【标注】【知识点】判断轴对称图形和中心对称图形

二、旋转与手拉手模型

1. 等边三角形中的手拉手旋转模型

等边 $\triangle ABC$ ，过 AB 边上一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E ，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转一周．



依题可知：

$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，由A点引发了两个共顶点的等边三角形，大手 $AB=AC$ ，小手 $AD=AE$ ，大手拉小手，通过“SAS”可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

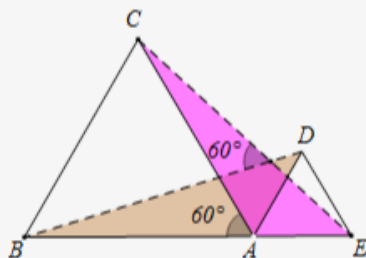
！结论：无论旋转多少度，1、 $BD = CE$ ，

2、 BD 、 CE 所形成的锐角夹角为 60° 。

【备注】①要清楚什么是“手拉手”

形状相同，大小不一定相等两个图形公共一个顶点的形式，俗称为“手拉手”
大手拉小手--大图形拉着一个小图形。

②求 BD 、 CE 所形成的夹角，是利用“8”字形倒角：



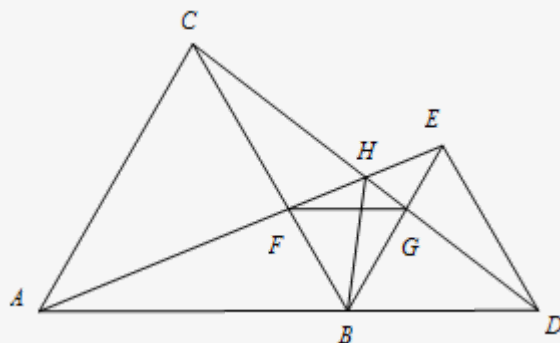
以该图为例：记 AC 与 BD 交于点 O ， BD 、 CE 交于点 F

由全等可得 $\angle ABD = \angle ACE$ ， $\angle AOB = \angle COD$ ，（8字模型）

得 $\angle BAD = \angle BFC = 60^\circ$

③知识补充（该部分内容可给程度较好的孩子拓展，熟记10个结论）

$\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 均为等边三角形， A 、 B 、 D 三点共线



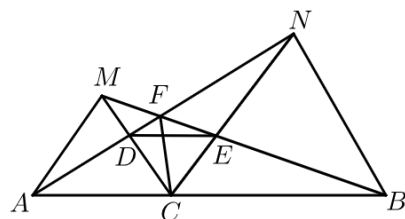
结论：

- (1) $\triangle ABE \cong \triangle CBD(SAS)$
- (2) $AE=CD$ (由1中全等可得)
- (3) $\angle CHA = 60^\circ$ (手拉手模型结论)
- (4) $\triangle ABF \cong \triangle CBG(ASA : \angle BAF = \angle BCG, AB=CB, \angle ABF = \angle CBG)$
- (5) $AF=CG$ (由5中全等可得)
- (6) $\triangle DBG \cong \triangle EBF(ASA : \angle GBD = \angle FBE, BD=BE, \angle BDG = \angle BEF)$
- (7) $FE=GD$ (由6中全等可得)
- (8) $\triangle FBG$ 为等边三角形($FB=BG, \angle FBG = 60^\circ$)
- (9) $FG \parallel AD(\angle GFB = \angle CBA = 60^\circ)$
- (10) HB 平分 $\angle AHD$ (过点 B 向 $AE、CD$ 作垂直, 利用全等三角形对应高线相等及角平分线的判定证明)

🧠 举个“栗”子

栗子6

9. 如图, 点 C 为线段 AB 上一点, $\triangle ACM、\triangle CBN$ 是等边三角形. 请你证明:



- (1) $AN = BM$.
- (2) $\angle MFA = 60^\circ$.

【备注】 手拉手模型证明

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 此图是旋转中的基本图形, 其中蕴含了许多等量关系,

$$\angle MCN = 60^\circ, AN = BM, CD = CE, AD = ME, ND = BE;$$

$$AM \parallel CN, CM \parallel BN; DE \parallel AB;$$

$$\triangle ACN \cong \triangle MCB, \triangle ADC \cong \triangle MCE, \triangle NDC \cong \triangle BEC;$$

$\triangle DEC$ 为等边三角形;

$$\angle AFC = \angle BFC,$$

$\because \triangle ACM、\triangle CBN$ 是等边三角形,

$$\therefore MC = AC, CN = CB, \angle ACN = \angle MCB.$$

$$\therefore \triangle ACN \cong \triangle MCB,$$

$$\therefore AN = BM .$$

$$(2) \text{ 方法一: } \angle MFA = \angle NAB + \angle MBA$$

$$= \angle BMC + \angle MBA$$

$$= \angle MCA$$

$$= 60^\circ .$$

$$\text{方法二: 由外角定理: } \angle MFA = \angle NAB + \angle MBA$$

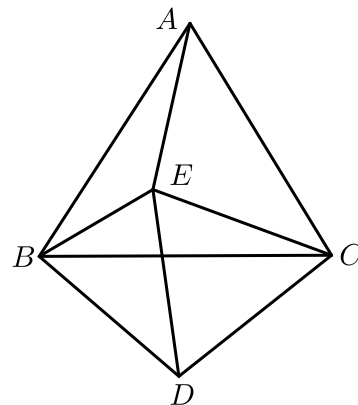
$$= \angle BMC + \angle MBA$$

$$= \angle MCA = 60^\circ .$$

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

栗子7

10. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形, 且 $\angle EBD = 66^\circ$, 则 $\angle AEB$ 的大小= _____ .



【备注】易证 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 设 $\angle CBD = \angle CAE = x$, 则 $\angle CBE = 66^\circ - x$,
 则 $\angle BAE = 60^\circ - x$, $\angle ABE = x - 6^\circ$,
 $\therefore \angle ABE + \angle BAE = 54^\circ$
 $\therefore \angle AEB = 126^\circ$

【答案】 126°

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形,

$$\therefore BC = AC, \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = \angle DCE = 60^\circ, CD = CE,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACE,$$

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE$ (SAS) ,
 $\therefore \angle CBD = \angle CAE$,
 $\therefore \angle EBD = 66^\circ$,
 $\therefore \angle CBD = \angle ABE + (66^\circ - 60^\circ)$,
 $\therefore \angle ABE = \angle CAE - 6^\circ$,
 $\therefore \angle ABE + \angle BAE = \angle CAE + \angle BAE - 6^\circ = \angle BAC - 6^\circ = 54^\circ$,
 $\therefore \angle AEB = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$.
 故答案为 : 126° .

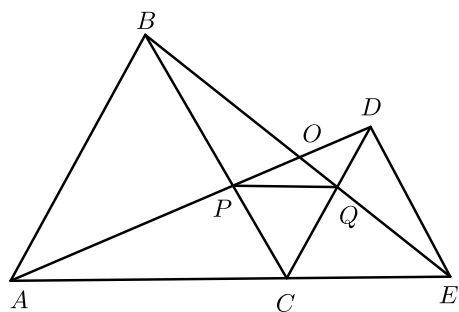
【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

栗子8

11. 如图所示, C 为线段 AE 上一动点(不与点 A, E 重合), 在 AE 同侧分别作正 $\triangle ABC$ 和正 $\triangle CDE$, AD 与 BE 交于点 O , AD 与 BC 交于点 P , BE 与 CD 交于点 Q , 连接 PQ . 以下四个结论:

- ① $\triangle ACD \cong \triangle BCE$;
- ② $AD = BE$;
- ③ $\angle AOB = 60^\circ$;
- ④ $\triangle CPQ$ 是等边三角形.

其中正确的是().



A. ①②③④

B. ②③④

C. ①③④

D. ①②③

【备注】手拉手模型结论, 证明详见模型讲解中的教法备注

【答案】 A

【解析】 $\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 正三角形,

$$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$$

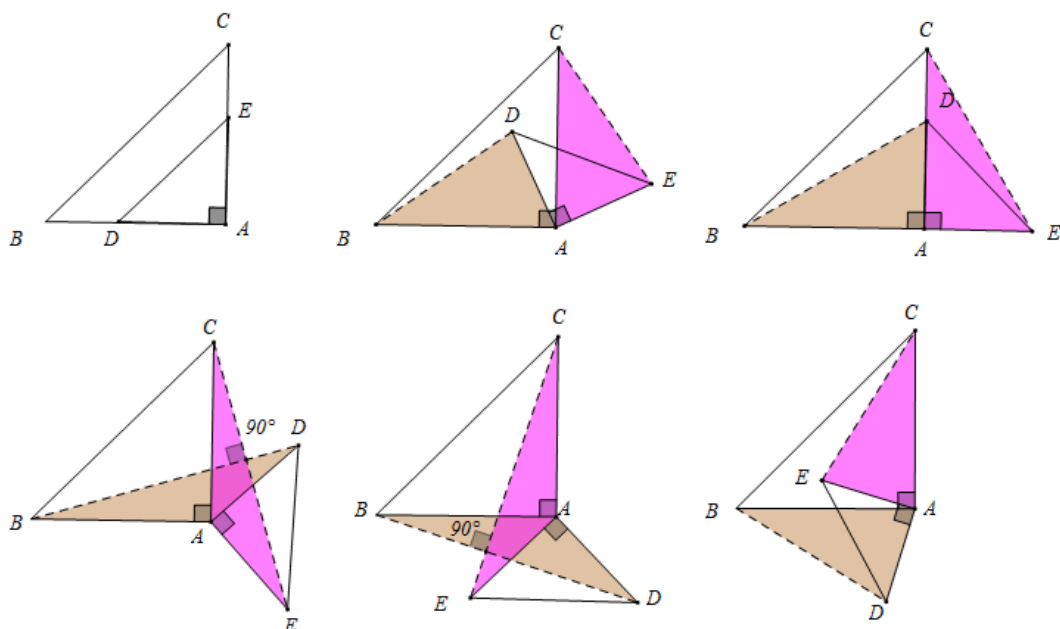
$$\therefore \angle ACD = \angle ACB + \angle BCD, \angle BCE = \angle DCE + \angle BCD,$$

$\therefore \angle ACD = \angle BCE$,
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle BEC (\text{SAS})$, 故①正确 ,
 $\therefore AD = BE$, 故②正确 ;
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle BEC$,
 $\therefore \angle ADC = \angle BEC$,
 $\therefore \angle AOB = \angle DAE + \angle AEO = \angle DAE + \angle ADC = \angle DCE = 60^\circ$, 故③正确 ;
 $\therefore CD = CE$, $\angle DCP = \angle ECQ = 60^\circ$, $\angle ADC = \angle BEC$,
 $\therefore \triangle CDP \cong \triangle CEQ (\text{ASA})$.
 $\therefore CP = CQ$,
 $\therefore \angle CPQ = \angle CQP = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle CPQ$ 是等边三角形 , 故④正确 ;
 故选 : A .

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

2. 等腰直角三角形中的手拉手旋转模型

已知等腰直角三角形 $\triangle ABC$, $AB = AC$, 过 AB 边上的一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E , 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转一周 .



依题可知 :

$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 都是 等腰直角三角形 , 由 A 点引发了两个共顶点的等腰直角三角形 , 大手 AB , 小手 AD , 大手拉小手 , 通过 “ SAS ” 可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

! 结论 : 无论旋转多少度 , 1、 $BD = CE$

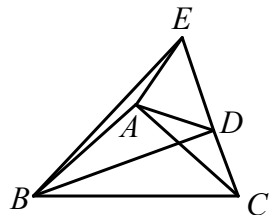
2、 BD 、 CE 所形成的夹角为 90° .

【备注】求 BD 、 CE 所形成的夹角，依旧利用“8”字形倒角

🧠 举个“栗”子

栗子9

12. 已知：如图在 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，点 C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。以下四个结论：① $BD = CE$ ；② $BD \perp CE$ ；③ $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；④ $BE^2 = 2(AD^2 + AB^2)$ ；其中正确结论的个数是（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【备注】手拉手模型结论

④利用勾股定理证明

【答案】C

【解析】①项，由题意可知， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，因为

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 90^\circ + \angle CAD,$$

$$\angle CAE = \angle DAE + \angle CAD = 90^\circ + \angle CAD, \text{ 所以 } \angle BAD = \angle CAE, \text{ 在 } \triangle BAD \text{ 与}$$

$$\triangle CAE \text{ 中, } \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases} \text{ 所以 } \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS), \text{ 故 } BD = CE, \text{ 故}$$

①项正确。

②项，由①得 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ， $\angle ACE = \angle ABD$ ，则

$$\angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + (\angle BCA + \angle ACD) =$$

$$(\angle DBC + \angle ABD) + \angle BCA = \angle ABC + \angle ACB, \text{ 因为 } \angle BAC = 90^\circ, \text{ 由三角形内角和为 } 180^\circ \text{ 可知, } \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ, \text{ 即}$$

$$\angle DBC + \angle DCB = 90^\circ, \text{ 所以}$$

$$\angle DBC = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \text{ 故 } BD \perp CE, \text{ 故②项正确。}$$

③项，因为 $\angle ACE = \angle ABD$ ，所以 $\angle ACE + \angle DBC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$ ，因为 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 $\angle ABC = 45^\circ$ ，即 $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ，故③项正确。

④项，由②知， $BD \perp CE$ ，所以 $\angle BDC = \angle BDE = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，由勾股定理得， $BE^2 = BD^2 + DE^2 = BD^2 + (AD^2 + AE^2) = 2AD^2 + BD^2$ ，又因为 $2(AD^2 + AB^2) = 2AD^2 + 2AB^2 = 2AD^2 + BC^2$ ，因为 $BC^2 \neq BD^2$ ，所以 $2AD^2 + BD^2 \neq 2AD^2 + BC^2$ ，即 $BE^2 \neq 2(AD^2 + AB^2)$ ，故④项错误。

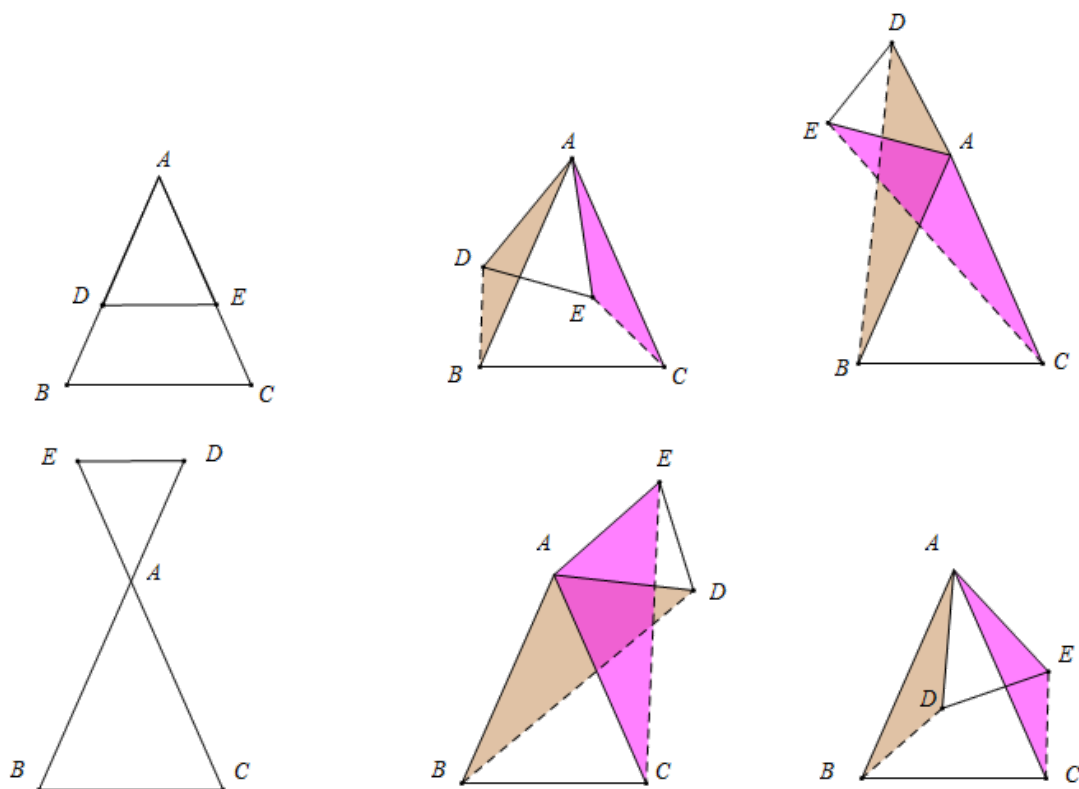
综上所述，正确的结论有3个。

故本题正确答案为C。

【标注】【知识点】直接用勾股求边长；等腰直角三角形的手拉手模型

3. 任意等腰三角形中的手拉手旋转模型

已知等腰 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，过 AB 边上的一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E ，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转一周。



依题可知：

由 A 点引发了两个共顶点的等腰三角形，大手 $AB = AC$ ，小手 $AD = AE$ ，大手拉小手，通过“**SAS**”可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

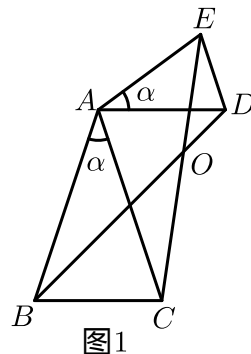
！结论：

无论旋转多少度，1、 $BD = CE$ ，

2、 BD 、 CE 所形成的夹角有一角等于 $\angle BAC$ 。

13. 完成下列各题 .

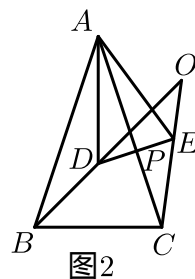
- (1) 如图1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为顶角为 α 的等腰三角形, 连接 BD 、 CE , BD 与 CE 、 AC 分别交于点 O 、点 P . 通过观察, 猜想:



① 线段 BD 和 CE 的数量关系为 _____ .

② BD 和 CE 之间的夹角 $\angle BOC =$ _____ .

- (2) 现将图1中的 $\triangle ADE$ 绕着点 A 顺时针旋转一个角度, 得到图2, BD 的延长线与 CE 的延长线交于点 O , 与 AC 交于点 P , 问(1)中猜想的结论还成立吗? 若成立, 予以证明; 若不成立, 说明理由 .



【备注】手拉手模型结论

【答案】(1)① 相等

② α

(2) 成立, 证明见解析 .

【解析】(1)① $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为顶角为 α 的等腰三角形,

$$\therefore \angle BAD = \alpha + \angle CAD, \angle CAE = \alpha + \angle CAD, AB = AC, AD = AE$$

,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS),$$

$$\therefore BD = CE, \angle ABD = \angle ACE.$$

$$\textcircled{2} \because \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE.$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle ABC + \angle ACB &= \angle ABD + \angle OBC + \angle ACB \\ &= \angle ACE + \angle OBC + \angle ACB \\ &= \angle OBC + \angle OCB \\ &= 180^\circ - \alpha, \end{aligned}$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = \alpha.$$

(2) 成立 .

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为顶角为 α 的等腰三角形 ,

$$\therefore \angle BAD = \alpha - \angle CAD, \angle CAE = \alpha - \angle CAD, AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CE, \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle ABC + \angle ACB &= \angle ABD + \angle OBC + \angle ACB \\ &= \angle ACE + \angle OBC + \angle ACB \\ &= \angle OBC + \angle OCB \\ &= 180^\circ - \alpha, \end{aligned}$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = \alpha.$$

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型